Benjamin-Ono 方程式の Lax 階層の多重ソリトン解のリアプノフ安定性(波動現象の数理と応用)

松野, 好雅

数理解析研究所講究録
第 1543 巻 2007 年 191-196

Benjamin-Ono 方程式の Lax 階層の多重ソリトン解のリアプノフ安定性

山口大学大学院理工学研究科　松野　好雅 (Yoshimasa Matsuno)
Division of Applied Mathematical Science
Graduate School of Science and Engineering
Yamaguchi University

I. 序論

Benjamin-Ono(BO) 方程式は深い成層流体中の弱非線形内部波の伝播を記述する方程式である．BO 方程式は完全可積分な発展方程式であり，その数学的な構造はよく知られている [1]．BO 方程式は無限次元の完全可積分なハミルトン力学系の形にも書き換えることができる [2]．BO 方程式には Lax 階層と呼ばれる完全可積分な方程式の系列が存在するが，ここではこの系列に含まれる全ての方程式の多重ソリトン解のリアプノフ安定性を証明する．なお，詳細に関してはすでに文献 [3] において公表されているので，ここではその要旨のみ述べる．

A. BO 方程式

$$u_t + 2uu_x + Hu_{xx} = 0 \tag{1.1a}$$

$$Hu(x,t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y,t)}{y-x} dy. \tag{1.1b}$$

B. BO 方程式の Lax 階層

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_{n+2}}{\delta u} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

ここで，I_{n+2} は BO 方程式の保存則で I_1 を除く最初の 3 つは

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \qquad I_3 = -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}uHu_x\right)dx$$

$$I_4 = -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{3}{4}u^2 Hu_x + \frac{1}{2}u_x^2\right)dx$$

で与えられる．また，変分導関数 $\delta/\delta u$ は以下で定義される：

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} I_{n+2}(u+\epsilon v)|_{\epsilon=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta I_{n+2}}{\delta u(x)} v(x) dx. \tag{1.3}$$

- BO 方程式は $t_2 = t$ として　$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_3}{\delta u}$ のように書ける．

1. 方程式 (1.2) の N-ソリトン解

BO 方程式の Lax 階層 (1.2) の N-ソリトン解は，次の行列式による表示が知られている：

$$u = u_N(x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_N) \tag{1.4a}$$

$$x_j = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{s+1}{2^s}a_j^s t_s + x_{j0} \qquad (j = 1, 2, .., N) \tag{1.4b}$$

$$u_N = i\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{f}{f^*} \qquad f = \det F \tag{1.4c}$$

$$F = (f_{jk})_{1\le j,k\le N} \qquad f_{jk} = \left(x - x_j + \frac{i}{a_j}\right) - \frac{2i}{a_j - a_k}(1-\delta_{jk}). \tag{1.4d}$$

ここで, a_j は 振幅パラメータ（$a_j > 0, a_j \neq a_k$ for $j \neq k (j,k = 1,2,...,N)$）, x_{j0} $(j = 1,2,...,N)$ は 位相パラメータ である. この表示より, N-ソリトン解は $2N$ 個のパラメータ, a_j, x_{j0} $(j = 1,2,...,N)$ で特徴づけられることがわかる. また, 各階層に属する方程式のソリトン解の関数形はすべて同じであり, ソリトンの速度のみが異なるという著しい性質を有している.

2. 1-ソリトン解

$$u_1 = \frac{2a_1}{a_1^2(x-x_1)^2+1}. \tag{1.5}$$

C. 高次BO方程式及び N-ソリトン解の安定性

1. 高次BO方程式

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_N}{\delta u} \tag{1.6a}$$

$$H_N(u) = I_{N+2} + \sum_{n=1}^{N}\mu_n I_{n+1}. \tag{1.6b}$$

2. N-ソリトン解

N-ソリトン解の形状を $U_N = U_N(x) \equiv u_N|_{t_0=t_1=...=0}$ で定義する. このとき U_N は (1.6) の定常解を与える. この解は方程式

$$\frac{\delta I_{N+2}}{\delta u} + \sum_{n=1}^{N}\mu_n\frac{\delta I_{n+1}}{\delta u} = 0 \qquad \text{at } u = U_N \tag{1.7}$$

を満たす. 未定係数 μ_n は振幅パラメータ a_j $(j = 1,2,...,N)$ により一意的に定まる.

3. リアプノフ安定性

U_N は以下の条件を満たすときリアプノフ安定という：

a) U_N は条件

$$I_{n+1}(u) = d_n \qquad (n = 1,2,...,N) \tag{1.8}$$

の下で汎関数 I_{N+2} の停留点である.

b) H_N は U_N において下に凸. それ故不等式

$$H_N(U_N + \epsilon v) - H_N(U_N) > 0 \tag{1.9}$$

が成り立つ．ここで ϵv は小さな摂動を表す．

D. BO **方程式のソリトン解の安定性に関する過去の研究**

- 1-ソリトン解の線形安定性　Chen & Kaup 1980
- 1-ソリトン解の非線形安定性　Bennet et al 1983
- N-ソリトン解の線形安定性　Matsuno & Kaup 1997
- 2-ソリトン解の非線形安定性　Neves & Lopes 2006

E. KdV **方程式のソリトン解の安定性に関する関連した研究**

- 2-ソリトン解のリアプノフ安定性　Maddocks & Sachs 1993
- N-ソリトン解のリアプノフ安定性　Kodama & Pelinovsky 2005

II. BO 方程式の逆散乱法

A. 固有値問題

BO 方程式の線形固有値問題は，$\phi^+(\phi^-)$ を x の上（下）半面で正則な関数の境界値として

$$i\phi_x^+ + \lambda(\phi^+ - \phi^-) = -u\phi^+ \tag{2.1}$$

のように書ける．上記方程式は，連続，及び離散固有値を有するが，対応する固有関数（Jost 関数）は，指定された境界条件の下で以下の微分積分方程式を満たす：

- 連続固有値 λ:

$$N(x,\lambda) \to e^{i\lambda x} \quad \bar{N}(x,\lambda) \to 1\ (x \to +\infty) \qquad M(x,\lambda) \to 1$$

$$\bar{M}(x,\lambda) \to e^{i\lambda x}\ (x \to -\infty) \tag{2.2a}$$

$$N_x - i\lambda N = iP_+(uN) \tag{2.2b}$$

$$\bar{N}_x - i\lambda\bar{N} = iP_+(u\bar{N}) - i\lambda \tag{2.2c}$$

$$M_x - i\lambda M = iP_+(uM) - i\lambda \tag{2.2d}$$

$$\bar{M}_x - i\lambda\bar{M} = iP_+(u\bar{M}) \tag{2.2e}$$

$$P_+ = \tfrac{1}{2}(1 - iH)$$

$$M = \bar{N} + \beta N \qquad (\beta:\ \text{反射係数}). \tag{2.3}$$

- 離散固有値 λ_j:

$$\Phi_j \to \frac{1}{x} \qquad x \to +\infty \qquad (j = 1, 2, ..., N) \tag{2.4a}$$

$$\Phi_{j,x} - i\lambda_j\Phi_j = iP_+(u\Phi_j) \qquad (j = 1, 2, ..., N). \tag{2.4b}$$

B. 保存則

$$I_n = (-1)^n \left\{ 2\pi \sum_{j=1}^{N} (-\lambda_j)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^\infty \lambda^{n-2} \beta^*(\lambda)\beta(\lambda) d\lambda \right\} \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{2.5}$$

C. 変分導関数

$$\left(\frac{\delta \lambda_j}{\delta u(x)} \right)_{u=U_N} = \frac{1}{2\pi\lambda_j} \Phi_j^*(x)\Phi_j(x) \qquad (j = 1, 2, ..., N) \tag{2.6}$$

$$(x - \gamma_j)\Phi_j + i \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^{N} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \Phi_k = 1 \qquad (j = 1, 2, ..., N) \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{\delta I_n}{\delta u(x)} \right)_{u=U_N} = (-1)^n (n-1) \sum_{j=1}^{N} (-\lambda_j)^{n-3} \Phi_j^*(x)\Phi_j(x) \qquad (n = 2, 3, ..., N) \tag{2.8}$$

$$\frac{\delta \beta(\lambda)}{\delta u(x)} = iM(x, \lambda) N^*(x, \lambda). \tag{2.9}$$

III. リヤプノフ安定性

A. N-ソリトン解の変分原理による特徴づけ

(1.7) は (2.8) を用いると以下のように書き替えられる：

$$(N+1) \sum_{j=1}^{N} b_j^{N-1} \Psi_j + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{N-n+1} n\mu_n \sum_{j=1}^{N} b_j^{n-2} \Psi_j = 0. \tag{3.1}$$

ここで，$\Psi_j = \Phi_j^* \Phi_j$，$b_j = -\lambda_j = a_j/2$. Ψ_j は独立な関数系であるから，μ_n は次の線形代数方程式を満たす必要がある：

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{N-n} n b_j^{n-1} \mu_n = (N+1) b_j^N \qquad (j = 1, 2, ..., N). \tag{3.2}$$

これを解くと

$$\mu_n = \frac{N+1}{n} \sigma_{N-n+1} \qquad (n = 1, 2, ..., N) \tag{3.3}$$

ただし，σ_n $(n = 1, 2, ..., N)$ は，以下で定義される b_n $(n = 1, 2, ..., N)$ の基本対称式である:

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{N} b_j \qquad \sigma_2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ (j<k)}}^{N} b_j b_k \quad \dots \quad \sigma_N = \prod_{j=1}^{N} b_j. \tag{3.4}$$

B. N**-ソリトン解の安定性**

(2.5) より保存則は，散乱係数を用いて以下のように表せる：

$$I_{n+1}(u) = (-1)^{n+1}\left\{2\pi\sum_{j=1}^{N} b_j^n + (-1)^{n+1} r_n\right\} \tag{3.5a}$$

$$r_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \lambda^{n-1}\beta^*(\lambda)\beta(\lambda)d\lambda. \tag{3.5b}$$

$Q(u)$ の $u = U_N$ の周りでの任意の増分を ΔQ とおく：

$$\Delta Q = Q(U_N + \epsilon v) - Q(U_N). \tag{3.6}$$

上記定義を用いると，条件 (1.8) は以下のように書ける：

$$\Delta I_{n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, ..., N). \tag{3.7}$$

すなわち

$$2\pi n\sum_{j=1}^{N} b_j^{n-1}\Delta b_j + (-1)^{n+1}\Delta r_n = 0 \qquad (n = 1, 2, ..., N). \tag{3.8}$$

$u = U_N$ のとき $\beta \equiv 0$ なので $\Delta(\beta^*\beta) = \Delta\beta^*\Delta\beta$. 従って

$$\Delta r_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \lambda^{n-1}\Delta\beta^*(\lambda)\Delta\beta(\lambda)d\lambda \sim O(\epsilon^2) > 0 \qquad (n = 1, 2, ...).$$

それゆえ，$\Delta r_n \sim O(\epsilon^2)$. 一方

$$\Delta b_j = \epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta b_j}{\delta u}\right)_{u=U_N} v(x)dx + O(\epsilon^2) \tag{3.9}$$

に注意すると，(3.8) が Δb_j に関して矛盾なく解けるためには，$\Delta b_j = O(\epsilon^2)$ であることが必要である．それゆえ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta b_j}{\delta u}\right)_{u=U_N} v(x)dx = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., N) \tag{3.10}$$

となるが，(2.6), (2.8) より，これは v に対し条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta I_{n+1}}{\delta u}\right)_{u=U_N} v(x)dx = 0 \qquad (n = 1, 2, ..., N+1) \tag{3.11}$$

を課すことと同等である．この条件下で (3.8) を解くと

$$\Delta b_j = \frac{1}{2\pi}\frac{\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n}V_{jn}\Delta r_n}{|V|} \qquad (j = 1, 2, ..., N). \tag{3.12}$$

ここで， V は Vandermonde 行列，V_{jk} は余因子で以下で定義される：

$$V = (v_{jk})_{1\le j,k\le N} \qquad v_{jk} = b_j^{k-1} \qquad V_{jk} = \frac{\partial|V|}{\partial v_{jk}}.$$

一方，(1.6)，(3.7) より

$$\Delta H_N = (-1)^N \left\{ 2\pi(N+1)\sum_{j=1}^{N} b_j^N \Delta b_j + (-1)^{N+2}\Delta r_{N+1} \right\}. \tag{3.13}$$

この式に (3.12) を代入する，最終的に不等式

$$\Delta H_N = (N+1)\sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma_{N-n+1}}{n}\Delta r_n + \Delta r_{N+1} > 0 \qquad (\because \sigma_j > 0 \quad \Delta r_j > 0 \quad j = 1,2,\ldots) \tag{3.14}$$

が得られる．以上で，関係式 (3.9) が証明され，これから N-ソリトン解のリアプノフ安定性が従う．

注意

$\Delta r_n = 0$ となる摂動は以下のように表せる:

$$\epsilon v(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U_N}{\partial x_{j0}} \delta x_{j0}. \tag{3.15}$$

これを除外するには，摂動 v に対して条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta I_{n+1}}{\delta u}\right)_{u=U_N} v(x)dx = 0 \qquad (n = 1,2,\ldots,N) \tag{3.16}$$

を課せばよい．

参考文献

[1] Y. Matsuno, *Recent topics on a class of nonlinear integrodifferential evolution equations of physical significance*, in G. Oyibo (ed.) Advances in Mathematical Research, Vol. **4** , Nova Science, New York, 2003, pp. 19-89.

[2] D.J. Kaup, T.I. Lakoba and Y. Matsuno, *Perturbation theory for the Benjamin-Ono equation*, Inverse Problems **15** (1999) 215-240.

[3] Y. Matsuno, *The Lyapunov stability of the N-soliton solutions in the Lax hierarchy of the Benjamin-Ono equation*, J. Math. Phys. **47** (2006) 103505 1-13.